Enseignant : Rémi Molinier
remi.molinier@univ-grenoble-alpes.fr

Algèbre bilinéaire

1 Avant propos

Cette feuille propose des exercices pour un survol approximatif du programme d'agreg interne sur la dualité et l'algèbre bilinéaire mais laisse de coté les notions d'adjoint, d'endomorphisme symétrique et d'isométrie qui seront traitées dans une autre feuille. Elle n'a pas l'ambition d'être exhaustive. Au vu du nombre d'exercices, Il n'est bien sûr pas attendu que vous résolviez l'ensemble de la feuille et d'ailleurs seul une toute petit fraction sera traitée en séance mais je vous invite à la parcourir dans sont intégralité et de piocher par-ci par-là les exercices qui vous titillent le plus.
Dans cette feuille, sans mention du contraire, k sera un corps et pour E un espace vectoriel sur un corps k, on notera E^* l'espace des formes linéaires sur E.

2 Formes linéaires et dualité

Exercice 1 (Espace dual)
Soit E un espace vectoriel.

1. On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On considère, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, l'application
$$e_i^* : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & k \\ \sum \lambda_j x_j & \longmapsto & \lambda_i. \end{array}$$
   (a) Montrer que pour tout i, $e_i^* \in E^*$.
   (b) Montrer que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ forme une base de E^* (qu'on appelle la **base duale** de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$).
   (c) Expliquer pourquoi la notation e_i^*, bien que très classique, n'est pas forcément judicieuse.
   (d) Montrer que E^* est isomorphe à E.
2. On suppose que $E = k[X]$.
   (a) Montrer que $(k[X])^*$ est isomorphe à $k^{\mathbb{N}}$.
   (b) Si $k = \mathbb{Q}$, justifier que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable alors que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ non. En déduire que $\mathbb{Q}[X]^*$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Q}[X]$.
   (De façon général on a que $k^{\mathbb{N}}$ n'admet pas de famille génératrice dénombrable et donc $k[X]$ et $k[X]^*$ ne sont jamais isomorphe)
3. On considère l'application $\Psi : E \to (E^*)^*$ qui envoie $u \in E$ sur l'application
$$\mathrm{ev}_x : \begin{array}{rcl} E^* & \longrightarrow & k \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x). \end{array}$$
   (a) Montrer que Ψ est bien définie et injective.
   (b) Montrer que c'est un isomorphisme si E est de dimension finie.
   (c) On dit souvent qu'en dimension finie, E et E^* ne sont pas "naturellement isomorphes" alors que E et $(E^*)^*$ oui. Qu'entend-t-on par là ?

Exercice 2 (Bases antéduales et polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ tel que pour tout i, j,
$$\varphi_i(f_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$
(la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est appelé la base **antéduale** de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$).

2. On suppose que $E = k_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n et soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in k^{n+1}$. Pour $a \in k$ on notera ev_a la forme linéaire
$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_a \colon k[X] &\longrightarrow k \\ P &\longmapsto P(a). \end{aligned}$$
   (a) Montrer que la famille $(\mathrm{ev}_{a_0}, \mathrm{ev}_{a_1}, \ldots, \mathrm{ev}_{a_n})$ forme une base de $k_n[X]^*$.
   (b) Donner la base antéduale de $(\mathrm{ev}_{a_0}, \mathrm{ev}_{a_1}, \ldots, \mathrm{ev}_{a_n})$.

Exercice 3 (Séparation)
Soit E un espace vectoriel et $x, y \in E$. Montrer que $x = y$ si et seulement si pour tout $\varphi \in E$, $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Exercice 4 (Principes fondamentaux de la dualité)
Soit E une espace vectoriel.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $A^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\}$ est un sous-espace de E^* et que $A^\circ = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$.
2. Soit B une partie de E^*. Montrer que ${}^\circ B = \{x \in E \mid \forall \beta \in B,\ \beta(x) = 0\}$ est un sous-espace de E et que ${}^\circ B = {}^\circ(\mathrm{Vect}(B))$.
3. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces de E. Montrer les propriétés suivantes.
   (a) $\{0\}^\circ = E^*$, $E^\circ = \{0\}$.
   (b) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2^\circ \subseteq F_1^\circ$.
   (c) $F_1 = {}^\circ(F_1^\circ)$.
   (d) $(F_1 + F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ$.
   (e) $(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ$.
4. Soit G_1 et G_2 deux sous-espaces de E^*. Montrer les propriétés suivantes.
   (a) ${}^\circ\{0\} = E$, ${}^\circ(E^*) = \{0\}$.
   (b) $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow {}^\circ G_2 \subseteq {}^\circ G_1$.
   (c) $G_1 = ({}^\circ G_1)^\circ$.
   (d) ${}^\circ(G_1 + G_2) = {}^\circ G_1 \cap {}^\circ G_2$.
   (e) $(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ$.
5. En considérant $E = k[X]$, montrer que les inclusions 4(c) et 4(e) ne sont pas des égalités en générale.
6. On suppose maintenant que E est de dimension finie.
   (a) Soit F un sous-espace de E. Montrer que
$$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E).$$
   (b) Soit G un sous-espace de E°. Montrer que
$$\dim(G) + \dim({}^\circ G) = \dim(E).$$
   (c) en déduire que les inclusions 4(c) et 4(e) sont des égalités en dimension finie.
   (d) En déduire une correspondance bijective décroissante entre les sous-espaces de E et les sous-espaces de E^*.

Exercice 5 (FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS)
Soit E un espace vectoriel.

1. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'on a équivalence entre
   (i) Il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = \ker(u)$,
   (ii) Il existe une droite vectoriel $D \subseteq E$ telle que $E = H \oplus D$.

On rappel qu'un sous-espace vérifiant l'une de ces propriétés équivalentes est appelé un **hyperplan** de E.

2. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*\backslash\{0\}$. Montrer que $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in k\backslash\{0\}$ tel que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$.
3. Plus généralement, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r \in E^*$ est une famille de formes linéaires. Montrer qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est combinaison linéaire des $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ si et seulement si

$$\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2) \cap \cdots \cap \ker(\varphi_r).$$

3 Algèbre bilinéaire - Généralités

Exercice 6 (DES EXEMPLES !)
Les réponses aux questions suivantes doivent être justifiées. Pour un espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire b et un sous-espace F on notera $F^\perp$.

1. Donner un exemple de forme bilinéaire non symétrique en dimension finie et un en dimension infinie.
2. Donner plusieurs exemples de formes bilinéaires symétrique non dégénérées pour chacun des espaces vectoriels suivants : k^n (pour $n \geqslant 1$), $k[X]$, $\mathrm{M}_n(k)$ (pour $n \geqslant 1$), un espace de suites réelles, un espace de fonctions.
3. Des exemples de formes bilinéaires symétriques non dégénérée dont le cône isotrope est non nul.
4. Des exemples de formes bilinéaires symétriques dont le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel.
5. Des exemples de formes bilinéaires symétriques non dégénérées (dont un exemple avec une forme définie positive) et de sous-espaces F où $(F^\perp)^\perp \neq F$.
6. Des exemples de formes bilinéaires symétriques non dégénérées (dont un exemple avec une forme définie positive) et de sous-espaces F où F et $F^\perp$ ne sont pas en somme directe.

Exercice 7 (VRAI OU FAUX SUR LES MATRICES CONGRUENTES)
Pour chacune des items suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont même rang.
2. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont même déterminant.
3. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont même trace.
4. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont les mêmes valeurs propres.
5. Si $k = \mathbb{C}$, deux matrices symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont le même rang.
6. Si $k = \mathbb{R}$, deux matrices symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont le même rang.
7. Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.

Exercice 8 (APPLICATION LINÉAIRE ASSOCIÉE À UNE FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE)
Soient E un espace vectoriel et $b\colon E \times E \to k$ une forme bilinéaire.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} b^*\colon E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto b(x, \cdot) \end{aligned}$$

   est bien définie et linéaire.

2. Montrer que l'application qui envoie une forme bilinéaire b sur l'application linéaire associée b^* définie un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E et l'espace vectoriel des applications linéaires de E vers E^*.

3. Montrer que b^* est injective si et seulement si b est non dégénérée.

4. Supposons que E est en dimension finie.

   (a) Soient e une base de E et e^* la base duale associée. Quel est le lien entre la matrice de b dans la base e et la matrice de b^* dans les bases e et e^* ?

   (b) Montrer que b^* est un isomorphisme si et seulement si b est non dégénérée. Donner un contre exemple dans le cas où E est de dimension infinie.

   (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit

$$\begin{aligned} \rho_F \colon E^* &\longrightarrow F^* . \\ \varphi &\longmapsto \varphi_{|F} \end{aligned}$$

   (d) Quel est le noyau de $\ker(\rho_F \circ b^*)$?

   (e) En déduire que si b est non dégénérée, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$. Donner un contre exemple dans le cas où b est dégénérée.

Exercice 9 (EXISTENCE DE BASES ORTHOGONALES)
On se propose de donner une autre démonstration de l'existence d'une base b-orthogonale, lorsque $b : E \times E \to k$ est une forme bilinéaire symétrique, E étant de dimension finie $n \geqslant 1$ et k de caractéristique différente de 2.

1. Si b est non nulle, montrer l'existence d'un vecteur $e_1 \in E$ tel que $b(e_1, e_1) \neq 0$.

2. Montrer que $E = Ke_1 \oplus (Ke_1)^\perp$.

3. Démontrer par récurrence sur n l'existence d'une base b-orthogonale.

4. Appliquer ce procédé à la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} b_M \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^t M y \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (EN PRATIQUE)
Ici $k = \mathbb{R}$. Pour chacune des formes $q \colon E \to \mathbb{R}$ suivantes, montrer que c'est une forme quadratique, donner (dans l'ordre de votre choix) la forme polaire associée, une base orthogonale, le rang, le noyau, la signature et le cône isotrope. Enfin pour le sous-espace F donné, calculer son orthogonal et vérifier si $F \oplus F^\perp = E$ ou non et si $(F^\perp)^\perp = F$ ou non.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$ et $F = \mathbb{R}(1, 1)$.

2. $E = \mathbb{R}^3$, $q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2$ et $F = \mathbb{R}(1, 0, -1)$.

3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $q(P) = P(2)P(1) + P(1)P(0)$ et $F = \mathbb{R}(1 - X)$.

4. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $q(P) = P(1)^2 - P(0)^2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

5. $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $q(P) = \det(P)$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 11 (CLASSIFICATION DES FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS FINI)
Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2 et $\alpha \in \mathbb{F}_q \backslash (\mathbb{F}_q)^2$. On souhaite montrer que la matrice d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_q^n$ est congruente à l'identité ou à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelques résultats préliminaires.
   (a) Montrer que l'application d'élévation au carré est un morphisme du groupe $(\mathbb{F}_q\backslash\{0\}, \times)$. Quel est son noyau ?
   (b) Montrer qu'il y a exactement $\frac{q-1}{2}$ carré dans $\mathbb{F}_q$.
   (c) En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{F}_q$ il existe $(x, y) \in \mathbb{F}_q^2$ tel que $ax^2 + by^2 = 1$.
2. Etudier le cas $n = 1$.
3. Montrer le résultat pour $n = 2$.
4. Montrer le résultat pour tout $n \geqslant 1$ par récurrence.
5. Combien existe-t-il de classes de congruence de matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$?

4 Espaces prehilbertiens et euclidiens

Exercice 12 (Vrai ou Faux sur les espaces préhilbertiens)
Pour chacune des entrées suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse en le justifiant.

1. Une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel de dimension finie E est un produit scalaire si et seulement si il existe une base orthonormée.
2. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout sous-espace F de E, on a $F \oplus F^{\perp} = E$.
3. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout sous-espace F de E, on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
4. Si une forme bilinéaire symétrique n'est que positive, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est pas forcément vérifiée.
5. À k fixé et dimension finie fixé, il n'existe qu'un seul espace euclidien "à isomorphisme près".

Exercice 13 (Calcul de distances)
Calculer les quantités suivantes.

1. $\inf\limits_{a,b \in \mathbb{R}} \left((1-a-b)^2 + (1-3a+b)^2 + (1-2a-b)^2\right)$.
2. $\inf\limits_{a,b,c \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^3 - a - bt - ct^2)^2 \mathrm{d}t\right)$.
3. $\inf\limits_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2\right)$ où $n \geqslant 1$, $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace des matrices symétriques.

Exercice 14 (Projection et estimateur des moindres carrés)
Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soient $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ qui réalisent
$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2\right).$$
2. Interpréter le résultat précédent en terme de régression linéaire.

Exercice 15 (Un exemple de polynômes orthogonaux : les polynômes de Laguerre)
On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$
$$h_n(x) = x^n e^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que L_n est une fonction polynômiale. Quel est son degré et son coefficient dominant ?

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$b(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

2. Montrer que b est bien définie et donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer $b(L_0, X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x).$$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on a
$$b(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \in_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx.$$
6. En déduire que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], b)$.

Exercice 16 (Inégalités)
Démontrer les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalités.

1. Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
2. Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$$\sum_{k=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_i^2.$$
3. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\operatorname{tr}(AB)^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$
4. Pour tous $a < b$ et toute fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, on a
$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right).$$

5 Adjoint et endomorphismes symétriques

Exercice 17 (Existence et unicité de l'adjoint)
Soient E un espace vectoriel sur un corps k, $b\colon E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique et $u\colon E \to E$ une application linéaire. On appelle **adjoint** de E tout endomorphisme $u^*\colon E \to E$ tel que pour tout $x, y \in E$, $b(u(x), y) = b(x, u^*(y))$.

1. Montrer que si b est non dégénérée, il y a au plus un adjoint de u.
2. En considérant $E = \mathbb{R}[X]$, b la forme bilinéaire (qui est un produit scalaire) définie pour tout $P = \sum a_n X^n, Q = \sum b_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ par
$$b(P,Q) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_n b_n,$$
et $u\colon E \to E$ définie pour $P \in \mathbb{R}[X]$ par $u(P) = P(1)$, montrer qu'on a pas toujours existence d'un adjoint (essayer de déterminer ce que devrait être $u^*(1)$).
3. On suppose que E est de dimension finie et que b est non dégénérée.
   (a) Montrer qu'il y a toujours existence de l'adjoint.
   (b) Montrer que l'application qui envoie un endomorphisme sur son adjoint est linéaire, et une involution et que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
   (c) Si e est une base de e, quel est le liens entre la matrice de u et la matrice de u^* ?

(d) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$, $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$ et que u et u^* ont le même rang.

Exercice 18 (ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES)
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme $u\colon E \to E$ est dit **symétrique** (ou autoadjoint) si $u^* = u$.

1. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalente.
   (i) u est symétrique.
   (ii) Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est symétrique.
   (iii) Pour toutes bases orthonormées e, la matrice de u dans e est symétrique.
2. Soit u un projecteur (i.e. $u \circ u = u$), montrer qu'on a équivalence entre
   (i) u est un projecteur orthogonal ;
   (ii) u est symétrique.

Exercice 19 (UN EXEMPLE)
Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}(M^t N)$ pour tous $M, N \in E$.
1. Soit $u\colon E \to E$ l'endomorphisme défini par $u(M) = M^t$ pour tout $M \in E$. Montrer que u est symétrique.
2. Soit $A \in E$. Soit $u\colon E \to E$ l'endomorphisme défini par $u(M) = MA$ pour tout $M \in E$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que u soit symétrique.

Exercice 20 (THÉORÈME SPECTRAL)
Soient $n \geqslant 1$ et $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est symétrique.

1. Montrer que les valeurs propres de S sont toute réelles (on pourra regarder pour $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de S, le produit $\overline{X^t} S X$ pour $X \in \mathbb{C}^n$ bien choisi).
2. Montrer que les sous-espaces propres de S sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$) deux à deux (on pourra regarder $X^t S Y$ pour X et Y bien choisis).
3. Montrer que S est S est diagonalisable en base orthonormée (on pourra procéder par récurrence.
4. Montrer que le résultat est faux si S a des coefficients complexes.
5. Un corollaire : montrer que la signature (r_+, r_-) d'une forme quadratique réelle q est donnée par le nombre de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres négatives d'une matrice de q dans n'importe quelle base de E.

Exercice 21 (DIAGONALISATION SIMULTANÉE)
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $q\colon E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui est aussi q-orthogonale.

Exercice 22 (DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES)
Montrer que dans un espace euclidien, tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 23 (DIAGONALISATION SIMULTANÉE - BIS)
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u, v deux endomorphismes symétriques. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors il existe une base orthonormée de E qui diagonalise simultanément u et v.

Exercice 24 (SUR LES VALEURS PROPRES DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES)
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u\colon E \to E$ un endomorphismes symétriques. Soit $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ l'ensemble des valeurs propres de u et on notera $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire.

1. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$\lambda_1 \|x\|_2^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|_2^2.$$
2. Soient $a \leqslant b$ deux réels. Montrer qu'on a équivalence entre

(i) toutes les valeurs propres de u sont dans $[a, b]$,

(ii) pour tout $x \in E$, $\langle u(x) - ax, u(x) - bx \rangle \leqslant 0$.

3. Rappeler la définition de la norme d'opérateur $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ associée à la norme $\| \cdot \|_2$ et montrer que $|\!|\!| u |\!|\!| = \lambda_n$. Est-ce toujours vrai pour un endomorphisme seulement diagonalisable ?

Exercice 25 (Endomorphisme symétrique positif et défini positif)
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme symétrique et **positif**, resp. **défini positif**, si la forme bilinéaire $b_u : E \times E \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x, y \in E$ par $b_u(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$ est positive, resp. définie positive.

1. Soit u un un endomorphisme symétrique de E. Montrer que u est positif (resp. défini positif) si et seulement si tout ses valeurs sont positive (resp. strictement positive).

2. Soit u un endomorphisme symétrique positif de E. Montre qu'il existe un unique endomorphisme symétrique positif v de E tel que $v \circ v = u$.

3. Montrer que tout endomorphisme symétrique peut s'écrire comme une différence de deux endomorphismes symétriques définies positifs.

Exercice 26 (Un exemple important : la décomposition en valeur singulière)
Soient $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que MM^T et M^TM sont des matrice symétrique positive (i.e. l'endomorphisme associé est symétrique positif).

Supposons que $n \geqslant m$ et soit $(v_1, v_2 \ldots, v_m)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^m$ qui diagonalise MM^T. On notera λ_i la valeur propre associé à v_i et $P \in \mathrm{O}_m(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les v_i.

1. Montrer que $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Mv_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} Mv_2, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} Mv_m \right)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2. En déduire une matrice $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice$\Sigma \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficient non nuls sont sur la diagonale tel que $M = P\Sigma Q$.

3. Comparer les valeurs propres et leurs mutiplicités des matrices MM^T et M^TM.